Math 110 : Algebre Lineaire Avancee

Al-Khwarizmi

Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala

Abrege du calcul par la restauration et la comparaison.

Algèbre : $10x + 11y = 1$

$2x + 1 = 2$

linéaire, quadratique, cubique

- groupes, anneaux, corps, Espaces vectoriels

Prologue

Théorie des Ensembles

(Le Language)

“Le langage est un ensemble de citations.”

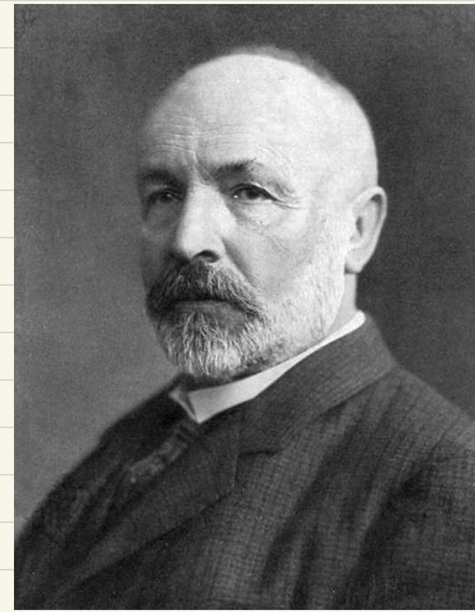
THE WARNING

Paradoxe de Russell

L'ensemble de tous les ensembles est il un ensemble ? Non.

- On regarde de qui arrive a l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes?

Z F (C)



Théorie ZFC (Cantor-Choix)

Axiomes de la Théorie

Z F (C)

Logique des Prédicats du 1er Ordre

- **Alphabet** : lettres, des symboles qui permettent d'identifier des objets (constantes, variables) : a, b, c, x, π ou de rédiger des prédicats ou de désigner des propriétés des fonctions. $P(x)$, $\cos(x)$

Quantificateurs Logiques

- Universel : $\forall$ "quelque soit"

"$\forall x \; P(x)$" "pour tout x la propriete $P(x)$ est vraie"

- existentiel : $\exists$ "Il existe"

$\exists x \; P(x)$ "il existe un x tel que la propriété $P(x)$ est vraie"

- $\exists!$: "il existe un unique..."
- $=$: égalité : $x=y$ les deux objet x et y sont le même objet
- Connecteurs logiques :

  $\wedge$ "et"

  $\vee$ "ou"

Connecteurs Logiques

$\Longrightarrow$ "implique"

$P(x) \Longrightarrow Q(x)$: si la propriété P est vraie pour x alors la propriété Q est vraie pour x.

$\Longleftrightarrow$ "si et seulement si" "ssi" connecteur de négation $\neg$

contraposée

$\neg P(x)$ la propriété P n'est pas vraie pour x.

- Règles syntaxiques : qui disent comment former des phrases correctes

- Un système de Deduction :
  permet de dériver à partir de predicats qui sont vrais d'autre predicats qui sont vrais.

Les ensembles sont une categorie d'objets satisfaisant certaines propriétés et munis d'un ensemble d'axiomes permettant de construite de nouveaux ensembles à partir d'existants.

Relation d'Appartenance

$a \in A$ a est un element de A

Ens

est lui aussi un ensemble!

Relation d'inclusion

$A \subset B$: A est contenu ds B

A est un sous ensemble de B

Ens Ens

si tout elt. de A est un elt de B

$$\forall e \in A \Longrightarrow e \in B.$$

Axiomes de la Théorie des Ensembles

Ensemble vide :

Il existe un ensemble qui ne possede aucun element et qui est un sous-ensemble de tout ensemble

On l'appelle ensemble vide et on le note $\emptyset$

$\forall E$ Ensemble $E \notin \emptyset \wedge \emptyset \subset E$

Axiome de la double inclusion

Deux ensembles sont egaux ssi ils sont inclus l'un ds l'autre

$$A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$$

Cor : $\emptyset$ est unique.

Ensemble des Parties : Soit A un Ens

il existe un ensemble dont les elts sont exactement les sous-ensembles de A

on le note $\mathcal{P}(A)$

$$\mathcal{P}(A) = \{ B \text{ tq } B \subset A \}$$

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

et en general : $\forall A$ Ens.

$$\mathcal{P}(A) \supset \{\emptyset, A\}$$

Axiome de la Reunion :

Soit E Ens, il existe un ensemble appelle la "reunion de E" et note

$\bigcup E$ dont les elements sont exactement les elements des elements de E

$\bigcup \emptyset$?

Axiome de la paire : A et B des Ens

il existe un ensemble dont les element sont exactement A et B on le note

$$\{A, B\}.$$

En particulier si $A = B$

$\{A, B\} = \{A\}$ le "singleton A"

Ex: $\bigcup_{\{A,B\}}$ = l'ensemble dt les elts sont les elts de A et les elts de B

$= A \cup B$

si I est un ensemble non vide et $(A_i)_{i\in I}$ est la donnée pour $i \in I$ d'un ensemble A_i alors il existe un ensemble noté

$\bigcup_{i \in I} A_i$ dont les elts sont les elts de chacun des A_i pour i variant ds I.

+ d'autres axiomes (4 autres axiomes)

⋮ Theorie ZF

+ Axiome du Choix

Theorie ZFC.

Soit I Ens et $(A_i)_{i \in I}$ la donnée pour chaque $i \in I$ d'un Ens A_i

On peut former l'Ens

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

Intersection

A, B Ens l'intersection de A et B

$$A \cap B = \{e \text{ tq } e \in A \wedge e \in B\}$$

$\subset A$ et B

Construction de $\mathbb{N}$ (Peano)

- $0 := \emptyset$

- $1 := \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

- Axiome de la Paire : $\{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 2$

- $3 = \bigcup_{\{2,\{2\}\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

....., on arrive a l'ensemble $\mathbb{N} = \{0,1,2, \dots\}$

la construction de l'ensemble (entier)

$n+1$ a partir de l'ensemble (entier)

n et la suivante

$$n+1 := \bigcup_{\{n,\{n\}\}} = \underset{\{0,1,\dots,n-1\}}{n} \cup \{n\}$$

successeur de n

$$= \{0, 1, \dots, n-1, n\}$$

$$\{0, 1, \dots, n-1\}$$

n

Relation d'Ordre : inferieur ou egal

$\leqslant$: $m \leqslant n \iff m \subseteq n$

$m = n$ ssi $m \leqslant n \wedge n \leqslant m$

$(m \subseteq n \wedge n \subseteq m)$

Principe du Raisonnement par recurrence

Proposition : Soit $\mathcal{N}_p \subset \mathbb{N}$ ($\mathcal{N}_p$ un ensemble d'entiers naturels) $\mathcal{N}_p = \{n \in \mathbb{N}$ tq la propriete $P(n)\}$

si $0 \in \mathcal{N}_p$ et que

$n \in \mathcal{N}_p \Longrightarrow n+1 \in \mathcal{N}_p$ alors

$\mathcal{N}_p = \mathbb{N}$

Produit Cartesien : A, B Ens

$$A \times B = \{ (a,b) \text{ tq } a \in A , b \in B \}$$

produit cartesien de A et B

$(a,b) = \{a, b\}$ pas bien defini ; en particuli

si $A = B$ $\{a,b\} = \{b,a\}$

Def : on pose

$$(a,b) := \{a, \{a,b\}\}$$ et alors

$(a,b) \neq (b,a)$ si $a \neq b$

Rmq : si A ou $B = \emptyset$ $A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset$

si $A = B$

$$A \times A =: A^2$$

Rmq : en general $A \times B \neq B \times A$ (sauf si $A = B$ ou l'un des 2 est $\emptyset$)

Itération : $n \geq 2$ ensembles $A_1, \dots, A_n$

on peut former le produit

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \ a_i \in A_i \text{ pour } i = 1, \dots, n \}$$

et m (en invoquant l'axiome de l'∞) on peut

étant donné une suite d'ensemble $(A_n)_{n \geq 1}$

on peut former

$$A_1 \times \dots \times A_n \times A_{n+1} \times \dots = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$= \left\{ (a_i)_{i \geq 1} = (a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots) \quad a_i \in A_i \text{ pour tout } i \geq 1 \right\}$$

I Ens $(A_i)_{i\in I}$ une collection d'ensembles indexée par I :

pour chaque $i \in I$ on se donne un ensemble A_i, on forme le produit

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \text{ tq } a_i \in A_i\}$$

On a besoin de l'axiome du Choix (ZFC)

<u>Relations Binaires</u>

Déf: Soient A, B des Ens une relation R entre A et B est un sous-ens

$$R \subset A \times B = \{(a,b) \quad a \in A \quad b \in B\}$$

Soient $a \in A$ $b \in B$ si

$(a,b) \in R$ on dit que a et b sont liés par la relation R; $a \sim_R b$

Exemple : $A = B = \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$

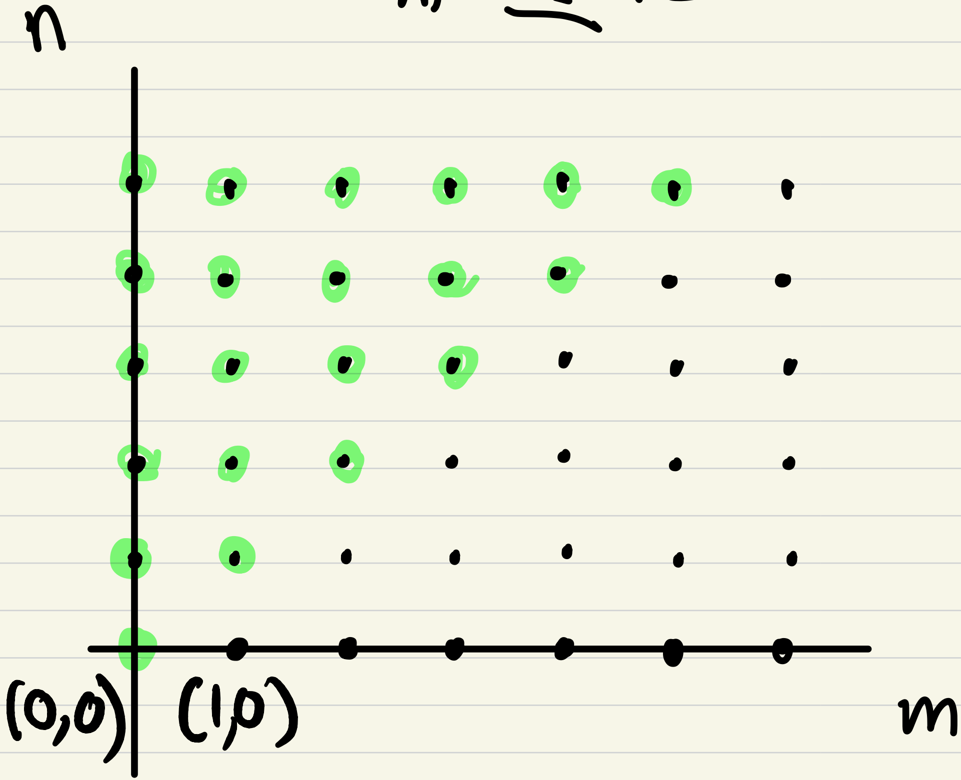
$$R = R_{\leq} = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \text{ tq } m \leq n\}$$
$$\subset \mathbb{N}^2$$

Divisibilité :

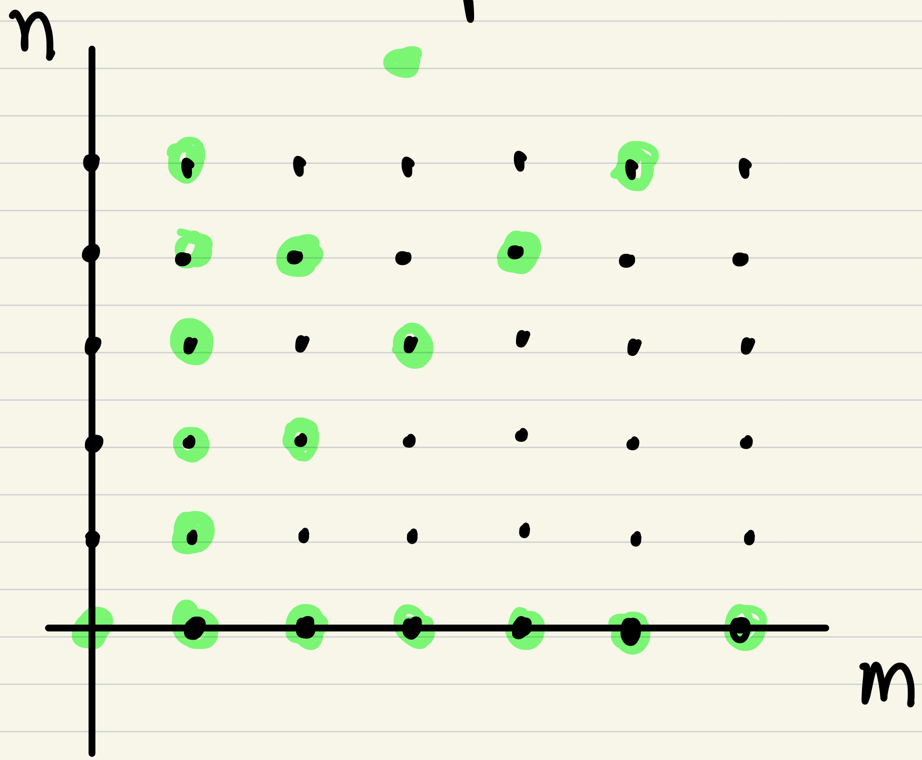
$$R_1 = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \text{ tq } m \mid n\}$$

divise, ie $n = km$ $k \in \mathbb{N}$

$m \leq n$



$m \mid n$



Divers types de Relations quand $A = B$

Reflexive : si $\forall a \in A \quad a \sim_R a$

Symetrique : si $\forall a, b \in A \quad a \sim_R b \Rightarrow b \sim_R a$

Antisymetrique : si $\forall a, b \in A$

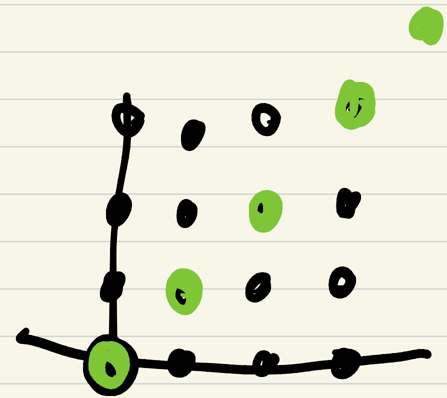
si $a \sim_R b$ et $b \sim_R a \Rightarrow a = b$

Transitive : si $\forall a, b, c \in A$

si $a \sim_R b$ et $b \sim_R c \Rightarrow a \sim_R c$

Exemple: Relation =

$$a \sim_{=} b \iff a = b$$



<u>Relation d'ordre</u> : une relation est dite "d'ordre" si elle est reflexive, antisymetrique et transitive

$\leq$

" $<$ " $\Leftrightarrow$ " $\leq$ " + " $\neq$ "

n'est pas reflexive.

<u>Relations d'equivalence</u> : un relation R est "d'equivalence" si elle est reflexive, symetrique, transitive.

<u>Ex</u>; "$=$"

"$\equiv \bmod q$": Soit $q \geq 1$ une entier, on dit que m et n sont congrus modulo q ssi $q / m-n$ ie. $\underset{k \in \mathbb{N}}{m-n=qk}$, $m \equiv n (q)$

Applications entre ensembles

Def: Soient X et Y deux ensembles, une application f de X vers Y est une "procedure" qui à tout element $x \in X$ associe un (unique) element y de Y et on note cet element $f(x) \in Y$

$$f : X \longrightarrow Y$$

Terminologie

On dit que $f(x)$ est l'image de x par f

Si $y \in Y$ est de la forme $y = f(x)$ on dit que x est un antécédent de y par f.

- l'image de X par f est le ss-ens de Y donné par $\mathrm{Im}(f) = f(X) := \{ f(x) \quad x \in X \}$

Exemples

Application Constante : $y_0 \in Y$ on définit l'appli constante $\underline{y_0} : x \in X \longrightarrow y_0 \in Y$

Application Identité : $Y = X$

$$Id_X : x \in X \longrightarrow x \in X$$

Suites: $X = \mathbb{N}$ Y qque

une suite $y = (y_n)_{n \geq 0}$ est la donnée

pour chaque entier n d'un $y_n \in Y$

$y : n \in \mathbb{N} \longrightarrow y_n \in Y$

une suite à valeurs ds Y

Projections Cartésiennes:

$n \geq 1$ $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ un produit d'ens

l'application projection sur la i-ème coordonnée $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\pi_i : (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \longrightarrow a_i \in A_i$$

Application de Cantor

$$C : (m,n) \in \mathbb{N}^2 \longrightarrow \frac{1}{2}\left((m+n)^2 + m + 3n\right) \in \mathbb{N}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une unique paire (m,n) tq $k = C(m,n)$

<u>Graphes</u> : X, Y des Ens

$f : X \longrightarrow Y$ une application

on lui associe son graphe $\mathcal{G}_f$

$$\mathcal{G}_f = \{ (x, f(x)) \quad x \in X \} \subset X \times Y$$

Def: un graphe $\mathcal{G} \subset X \times Y$ est un sous ensemble de $X \times Y$ qui la propriété suivante: pour $x \in X$ l'ensemble

$$\mathcal{G}_x := \{(x,y) \in \mathcal{G}\} \subset \mathcal{G} \subset X \times Y$$

n'a qu'un seul élément

l'ensemble G_f défini pour $f : X \to Y$ est bien un graphe et pour tout $x \in X$ l'unique élément de G_f de la forme (x, y) est $(x, f(x))$.

Graphes vs Applications

Si $\mathcal{G} \subset X \times Y$ est un graphe on lui associe l'application $f_{\mathcal{G}}$ définie par :

$x \in X \longrightarrow f_{\mathcal{G}}(x) = y$ où y est l'unique élément de Y tq $(x, y) \in \mathcal{G}_x$

Corollaire : Soient X, Y des Ens

les application de X vers Y peuvent identifiés

avec un ensemble :

l'ensemble des graphes de $X \times Y$

$\mathcal{G}(X,Y)$ qui est un ss-ensemble de

l'ensemble des parties $\mathcal{P}(X \times Y)$

On note cet ensemble

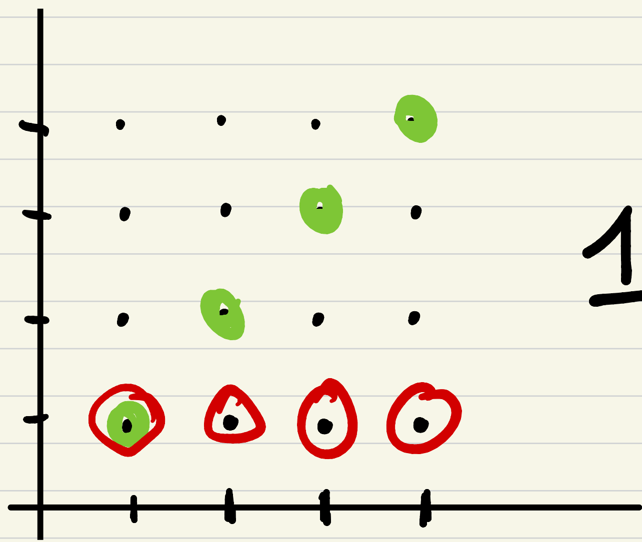
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{ENS}}(X,Y) = \mathcal{F}(X;Y)$$

" Homomorphismes "d'ensembles" de X vers Y

= fcts de X à valeurs ds Y

$X = Y = \{1, 2, 3, 4\}$

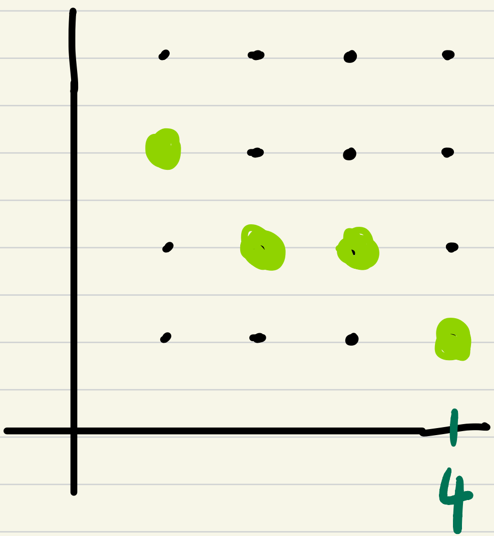
$$\mathrm{Id}_X : \begin{array}{l} 1 \to 1 \\ 2 \to 2 \\ 3 \to 3 \\ 4 \to 4 \end{array}$$



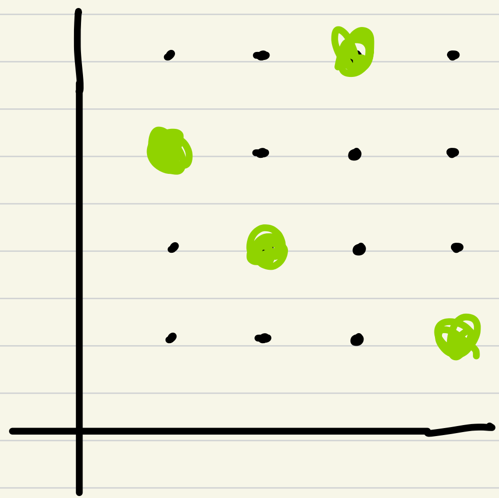
$$\underline{1} : \begin{array}{l} 1 \to 1 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 1 \\ 4 \to 1 \end{array}$$

$X = Y = \{1, 2, 3, 4\}$

- $f_1 : 1 \to 3,\ 2 \to 2,\ 3 \to 2,\ 4 \to 1$
- $f_2 : 1 \to 3,\ 2 \to 2,\ 3 \to 4,\ 4 \to 1$
- $f_3 : 1 \to 2,\ 2 \to 3,\ 3 \to 4,\ 4 \to 1$

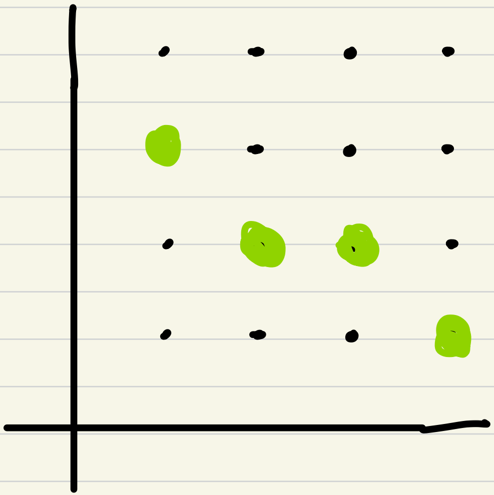


f_1

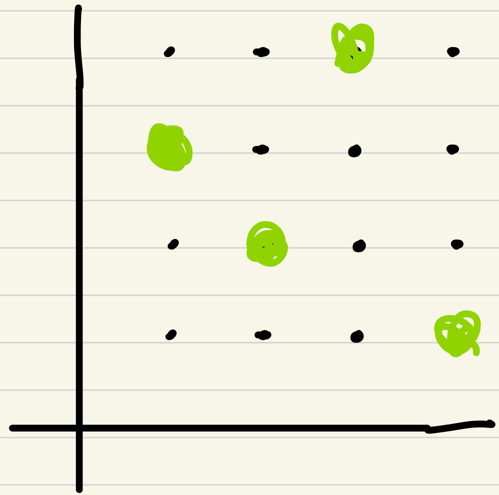


f_2

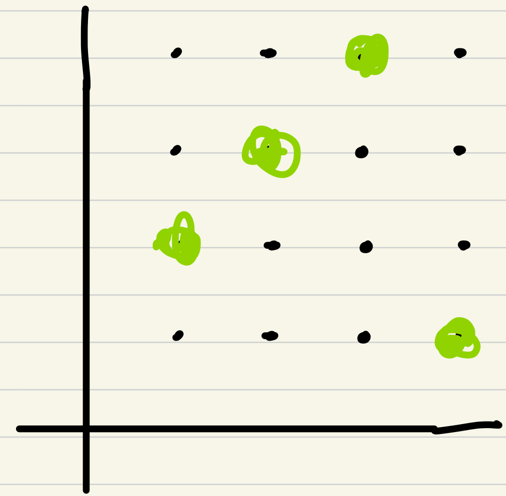
f_3



f_1



f_2



f_3